

Figura 1

1 - A equação de movimento do sistema representado na Figura 1 é $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0$.

a) Estabeleça a equação característica e obtenha as suas raízes em função de m, c e k. (1 valor)

b) Quando a razão de amortecimento ξ é menor do que 1, que forma têm as raízes da equação característica? Represente graficamente o movimento do sistema para este caso. (1)

2 - Considere um sistema com um grau de liberdade actuado por uma força harmónica. Neste caso, a equação diferencial do movimento é da forma $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=F\cos(\omega t)$, com m, c, k e F constantes.

a) A resposta permanente pode-se escrever como $x_p(t)=B_1\cos(\omega t)+B_2\sin(\omega t)$. Partindo desta expressão, deduza as expressões que relacionam a amplitude $X(\omega)$ e o ângulo de fase $\phi(\omega)$ da resposta permanente com m, c, k, F e ω.(1.5)

b) O factor de amplificação dinâmica $\mu(\omega)$ é dado por $\mu(\omega)=X(\omega)/X_S$, em que X_S representa o deslocamento estático. Represente graficamente o factor de amplificação dinâmica em função da razão de frequências ω/ω_n, para três casos típicos: razão de amortecimento muito pequena ($\xi<0.1$), média ($0.3<\xi<0.5$) e elevada $\xi>1$. (0.75)

3 – Sistemas com n graus de liberdade

a) Sugira uma transformação de coordenadas para desacoplar as equações do movimento de um sistema discreto com n graus de liberdade, não amortecido e sob a acção de forças exteriores. (0.75)

b) Escreva as equações do movimento desacopladas, explicitando a forma das matrizes e vector(es). (0.75)

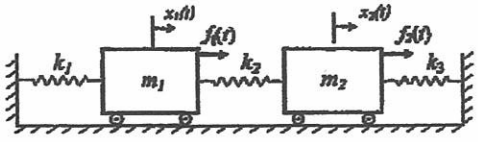


Figura 2

c) Suponha que as forças aplicadas ao sistema representado na Figura 2 são $f_1(t)=F_1\cos(\omega t)$ e $f_2=0$ e que ω varia. Quais são as amplitudes máximas do movimento das massas do sistema (sistema idealizado) e qual é a amplitude mínima, em módulo, de vibração da massa 1? (0.75)

4 – Deduza a equação diferencial parcial do movimento transversal, $v(x,t)$, de uma corda de secção transversal com área A, com módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ (A, E e ρ constantes), sujeita a uma força por unidade de comprimento $f(x,t)$, segundo z (Figura 3). (1.5)

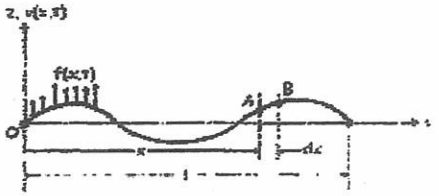
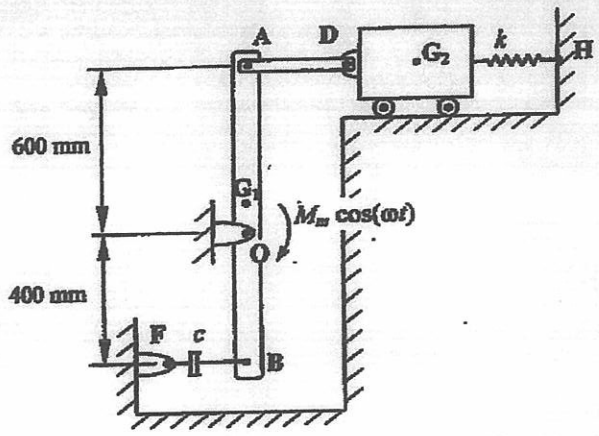


Figura 3

Relações trigonométricas: $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$; $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$; $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$.

Exame de Vibrações de Sistemas Mecânicos Época Normal FEUP – DEMEGI 13 de Janeiro de 2006

Parte prática 2horas e 15 minutos PERMITIDA A CONSULTA DE UM TEXTO DE APOIO



$\overline{AB} = \ell = 1$ m

$\overline{AG_1} = \frac{\ell}{2}$

O sistema representado na figura acima é constituído por uma barra rígida[1], de massa m_1=2 kg. A barra está articulada no ponto O e sujeita à acção de um momento motor $M_m \cos(\omega t)$. Está também ligada ao exterior no ponto A através de uma pequena barra (AD), de uma massa rígida de 2 kg e de uma mola com rigidez k=50 N/m. A barra AD é rígida e de massa desprezável. Os pontos B e F encontram-se ligados por um amortecedor viscoso. Admita que os deslocamentos são pequenos e que em repouso a barra se encontra na vertical.

a) Obtenha a equação do movimento.

Suponha que a equação do movimento é: $0.9\ddot{\theta}(t) + 0.09c\dot{\theta}(t) + 15.06\theta(t) = M_m \cos(\omega t)$

e determine:

b) a frequência natural, ω_n;

c) sabendo que o tempo que decorre entre dois picos sucessivos de vibração em regime livre é 2 segundos, calcule a constante de amortecimento c;

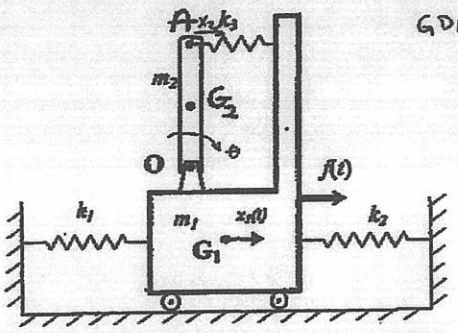
d) para uma frequência de excitação de 6 rad/s, calcule a amplitude (M_m) máxima do momento motor de modo a que a amplitude de vibração no ponto A não ultrapasse os 6 milímetros;

e) na situação da alínea anterior, obtenha as amplitudes das forças nos pontos A e B.

2 – O sistema representado na figura seguinte é constituído por duas molas, de rigidez k_1=1000 N/m e k_2= 2000 N/m, e por um carrinho rígido de massa m_1= 2.67 kg que translada horizontalmente ($x_1(t)$) sob a acção de uma força harmónica $f(t)$=F $\cos(\omega t)$, com F=3 N. Verificou-se que a máxima amplitude de vibração ocorre à frequência de 30 rad/s, que é também a frequência de funcionamento do sistema. Para resolver este problema, acrescentou-se uma barra rígida[1] ao corpo 1, articulada no ponto O (rotação $\theta(t)$), de massa m_2=1 kg e comprimento L=0.1 m, e uma mola de rigidez k_3= 500 N/m.

[1] Nota: o momento de inércia de uma barra em relação a um eixo que passa pelo seu centro de gravidade é $I_G = \frac{1}{12} m\ell^2$

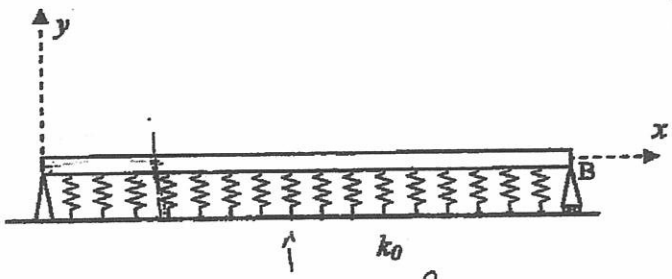
GDL = x_1, θ ou x_1, x_2 ?



a) Determine as equações do movimento recorrendo ao formalismo de Lagrange.
b) Determine as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.
c) Escreva as equações do movimento na base modal.
d) Qual deve ser o novo valor de k_3 de forma que a amplitude de vibração do carrinho seja nula.

3 – Uma viga (flexível) de comprimento ℓ, de secção transversal com área A e segundo momento área I (m^4), módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ, encontra-se apoiada nas duas extremidades e assente sobre uma fundação elástica de rigidez por unidade de comprimento k_0. Pretende-se analisar a vibração à flexão desta viga.

a) Escreva as condições de fronteira do sistema.
b) Verifique se a função $V(x) = \delta\, sen\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$ é uma função admissível.
c) Determine uma estimativa para a frequência fundamental de vibração do sistema.
d) Calcule o erro da estimativa anterior quando $k_0 \to 0$. Comente o resultado.



$\overline{AB} = \ell$

f_h exato?

Exame – 13/01/06

Parte Teórica

3. a) Uma transformação de coordenadas projectando o sistema de equações na base modal usando para o efeito a matriz de transformação formada pelos vectores modais normalizados para massas modais unitárias.

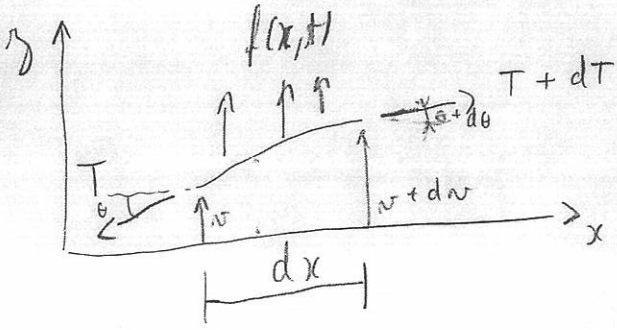
b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{\eta}_n(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \vdots \\ \eta_n(t) \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \phi_{11} f_1(t) + \ldots + \phi_{n1} f_n(t) \\ \vdots \\ \phi_{1n} f_1(t) + \ldots + \phi_{nn} f_n(t) \end{Bmatrix}$$

c) As amplitudes máximas tendem para ∞ quando a frequência de excitação tende para uma das duas frequências naturais do sistema (para ambas as massas).

A amplitude mínima da massa 1 é zero e ocorre para $\omega_1 < \omega < \omega_2$.

4.



$$-T \operatorname{sen}\theta + f(x,t)\,dx + (T+dT)\operatorname{sen}(\theta+d\theta) = \rho A\,dx\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}$$

Para θ pequenos:

$$\operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta = \frac{\partial v}{\partial x} \Longrightarrow \operatorname{sen}(\theta+d\theta) \cong \tan(\theta+d\theta) = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx$$

Considerando tensão constante, $\frac{\partial T}{\partial x}\,dx = 0$

$$-T\frac{\partial v}{\partial x} + f(x,t)\,dx + \left(T + \cancel{\frac{\partial T}{\partial x}\,dx}^{\,=0}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx\right) = \rho A\,dx\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{-T\frac{\partial v}{\partial x}} + f(x,t)\,dx + \cancel{T\frac{\partial v}{\partial x}} + T\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx = \rho A\,dx\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Dividindo tudo por dx

$$T\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) = \rho A\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \qquad \text{c.q.d.}$$

Parte Prática

2. a) Graus de liberdade: $\theta(t)$ e $x_1(t)$

θ: ângulo em torno de O (sentido anti-horário)

$$J_0 = \frac{1}{12} m_2 l^2 + m_2 \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m_2 l^2}{3}$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{l}{2} \underset{\sim}{\sin}\theta + x_1\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 l^2}{3} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{l}{2}\dot{\theta} + \dot{x}_1\right)^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 x_1^2 + \frac{1}{2} K_3 \left(l \underset{\sim}{\sin}\theta\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(K_1 + K_2) x_1^2 + \frac{1}{2} K_3 l^2 \theta^2$$

Forças não conservativas:

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f(t) \cdot x_1\right) = f(t)$$

$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(f(t) \cdot x_1\right) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 + m_2\left(\frac{l}{2}\dot{\theta} + \dot{x}_1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 \frac{l}{2}\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = (k_1 + k_2)\, x_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m_2 l^2}{3}\,\dot{\theta} + m_2\left(\frac{l}{2}\,\dot{\theta} + \dot{x}_1\right)\frac{l}{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{7 m_2 l^2}{12}\,\ddot{\theta} + m_2\,\frac{l}{2}\,\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = k_3 l^2 \theta$$

$$\begin{cases} \left(m_1 + m_2\right)\ddot{x}_1 + m_2\,\frac{l}{2}\,\ddot{\theta} + (k_1 + k_2)\, x_1 = f(t) \\ \\ \frac{7 m_2}{12}\, l^2 \ddot{\theta} + m_2\,\frac{l}{2}\,\ddot{x}_1 + k_3 l^2 \theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2\,\frac{l}{2} \\ \\ m_2\,\frac{l}{2} & \frac{7 m_2}{12}\, l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ \\ 0 & k_3 l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) $$\{x(t)\} = \{u\}\cos(\omega t - \phi)$$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - (m_1 + m_2)\omega^2 & -m_2\,\frac{l}{2}\,\omega^2 \\ \\ -m_2\,\frac{l}{2}\,\omega^2 & k_3 l^2 - \frac{7 m_2}{12}\, l^2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Substituindo valores, calculando o determinante característico e igualando-o a zero:

$$\begin{vmatrix} 3000 - 3{,}67\,\omega^2 & -0{,}05\,\omega^2 \\ -0{,}05\,\omega^2 & 5 - \frac{7}{12}\times 1\times 0{,}1^2\,\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \omega_1 \cong 24{,}9670 \text{ rad/s} \quad \vee \quad \omega_2 \cong 35{,}6740 \text{ rad/s}$

1ª Forma Natural:

$$(3000 - 3{,}67 \times 24{,}9670^2)\,u_1 - 0{,}05 \times 24{,}9670^2\,u_2 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow u_1 \cong 0{,}04376\,u_2$

$$\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 0{,}04376 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2ª Forma Natural:

$$(3000 - 3{,}67 \times 35{,}6740^2)\,u_1 - 0{,}05 \times 35{,}6740^2\,u_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow u_1 \cong -0{,}03809\,u_2$

$$\{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -0{,}03809 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

c) Normalização:

$$\{\phi\}_i = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_i^T [m] \{u\}_i}} \{u\}_i$$

VP

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{0,01724}} \begin{Bmatrix} 0,04376 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,3333 \\ 7,6167 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\sqrt{0,007349}} \begin{Bmatrix} -0,03809 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,4443 \\ 11,6651 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 24,9670^2 & 0 \\ 0 & 35,6740^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,3333\, f(t) \\ -0,4443\, f(t) \end{Bmatrix}$$

Sendo: $f(t) = 3\cos(30t)$

d) Através de b):

$$\begin{bmatrix} 3000 - 3,67\,\omega^2 & -0,05\,\omega^2 \\ -0,05\,\omega^2 & 0,01\,K_3 - \frac{7}{12} \times 0,01\,\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1(\omega) \\ \Theta(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3\cos(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Através da expressão 9.19, e sabendo que $\omega = 30\ rad/s$

$$X_1(\omega) = \frac{\left(0,01\,K_3 - \frac{7}{12} \times 0,01 \times 30^2\right) 3 - 0}{\left(3000 - 3,67 \times 30^2\right)\left(0,01\,K_3 - \frac{7}{12} \times 0,01 \times 30^2\right) - \left(-0,05 \times 30^2\right)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{K_3 = 525\ N/m}$